

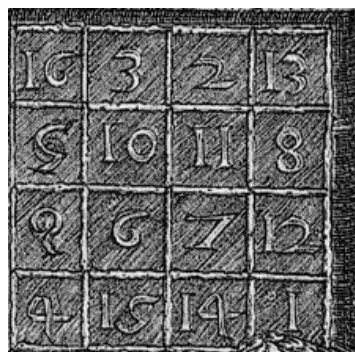
IL CUBO di COPPO

Come nasce un rompicapo matematico (ma non troppo)

L'interesse dell'uomo verso i quadrati numerici ha origini antiche. Il più datato di essi sembra infatti che risalga al 2800 a.c., in Cina, ed è conosciuto come **quadrato di Lo Shu**. Pare anche che nel X secolo i cinesi già conoscessero quadrati fino all'ordine 10.



Bisogna attendere il periodo rinascimentale (ma soprattutto post-rinascimentale) per trovare traccia dell'interessamento di matematici e studiosi occidentali verso i quadrati magici. È il caso di Luca Pacioli, presbitero e matematico, o di Albrecht Dürer, pittore e matematico, e di tanti altri matematici che hanno calcolato il numero di quadrati ottenibili per griglie di n numeri, o che hanno cercato di individuare una logica matematica per distribuire i diversi numeri all'interno delle griglie, o ancora che hanno cercato di stabilire il numero esatto di quadrati magici di un dato ordine diversi tra loro.



Altri hanno sperimentato i **quadrati di quadrati**, ossia quadrati magici le cui celle sono occupate da numeri diversi elevati al quadrato, ed ancora un insieme di quadrati di ordine n sovrapposti per n volte (fine XIX secolo) tali da formare un unico sistema definito come **cubo magico**.

Oltre ai quadrati magici esistono anche i quadrati latini nei quali i numeri che ne costituiscono l'ordine sono presenti solo nelle righe e nelle colonne e non nelle due diagonali come avviene nei quadrati magici.



A α	B δ	C β	D ϵ	E γ
B β	C ϵ	D γ	E α	A δ
C γ	D α	E δ	A β	B ϵ
D δ	E β	A ϵ	B γ	C α
E ϵ	A γ	B α	C δ	D β

Il più noto dei quadrati latini è certamente il Sudoku, che però presenta un'ulteriore suddivisione della griglia in 9 sottoinsiemi formati ciascuno da 9 caselle (3x3) all'interno delle quali, come è noto, devono essere contenuti tutti e 9 i numeri senza ripetizione.

L'introduzione di questi sottoinsiemi dà la possibilità a colui che "progetta" lo schema di poter ridurre la quantità dei numeri visibili portando (talvolta) il solutore del gioco a dover fare ricorso al pensiero laterale.

Va subito detto che i quadrati formati da griglie ortogonali non sono di tipo matematico: infatti per la soluzione di uno schema non è necessario eseguire alcuna operazione aritmetica; inoltre, i numeri possono anche essere sostituiti da lettere o da qualsiasi simbolo grafico.

1	4	5	3	2	7	6	9	8
8	3	9	6	5	4	1	2	7
6	7	2	9	1	8	5	4	3
4	9	6	1	8	5	3	7	2
2	1	8	4	7	3	9	5	6
7	5	3	2	9	6	4	8	1
3	6	7	5	4	2	8	1	9
9	8	4	7	6	1	2	3	5
5	2	1	8	3	9	7	6	4

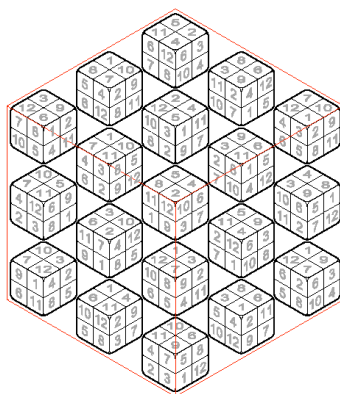
In tutti i casi fin qui citati si è sempre fatto riferimento a semplici griglie quadrate dall'aspetto grafico piuttosto banale, basate su sistemi di gioco risalenti a molti secoli fa. L'architetto italiano Eugenio Coppo ha quindi creato un nuovo rompicapo, destinato all'intrattenimento matematico, chiamato appunto Cubo di Coppo.

Già negli anni '80 (molto prima quindi della diffusione del Sudoku) Coppo iniziò a studiare, sulla scia del grande successo del **Cubo di Rubik** (invenzione di Ernő Rubik, anch'egli architetto), un rompicapo alternativo a quest'ultimo. E così, pur riconoscendo che sarebbe stato impossibile giungere a inventare qualcosa che si avvicinasse all'ineguagliabile risultato di Rubik, riuscì comunque a ideare alcuni rompicapo tridimensionali composti perlopiù da insiemi misti formati sia da sfere che da cubi. Solo nel 2008, a seguito della diffusione del Sudoku in tutto il mondo, Eugenio Coppo ha pensato di fondere insieme gli studi degli anni precedenti con la filosofia dei quadrati latini giungendo all'invenzione di un nuovo rompicapo che prese prima il nome di **Sukoppo** ma che iniziò poi a diffondersi, come avviene spesso, con il nome del suo autore divenendo quindi il **Cubo di Coppo**.

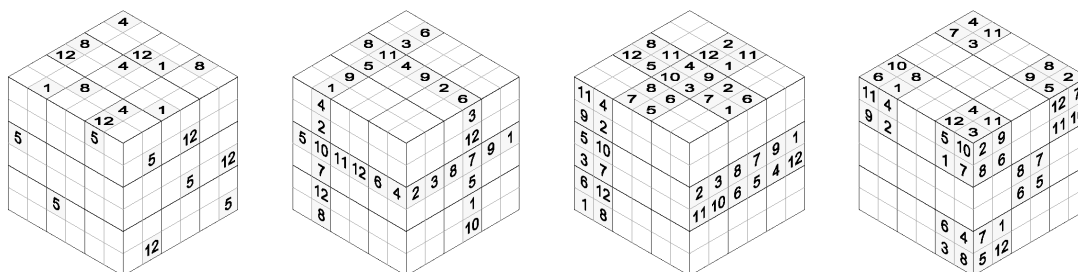
Gli studi iniziali hanno visto l'impiego di un semplice cubo, inteso proprio come solido tridimensionale a 6 facce quadrate, in ciascuna delle quali è stata successivamente ricavata una griglia numerica di vari ordini a partire da 2. Il più interessante tra questi è risultato essere il cubo di ordine 4 in cui ciascuna faccia presentava 16 diverse caselle distribuite ovviamente in 4 file e 4 colonne. Ma era anche possibile ritrovare i 16 numeri contenute in tutte le diverse file di caselle (12 per l'esattezza) presenti su 4 facce consecutive del cubo: il risultato era sicuramente interessante ma di non facile divulgazione.



Si sente dire spesso che molte intuizioni siano arrivate quasi per caso. Pare che sia andata così anche per il Cubo di Coppo. Il suo ideatore, infatti, nel rappresentare il cubo con le griglie in assonometria isometrica, si ritrovò la proiezione su carta di tre sole facce del cubo, ovvero di tre quadrati isometrici, cioè di uno schema graficamente semplice ma nel quale poter ricercare e definire relazioni più o meno complesse. Si trattava anche di trovare tra i tanti l'ordine giusto, ossia il numero di file e di colonne da ricavare su ciascuna delle tre facce piane, ma qualsiasi tentativo si facesse non dava il risultato sperato. Finché, dopo molti studi, giunse l'idea che portò alla svolta definitiva: si trattava di riuscire a dare una connotazione tridimensionale a uno schema grafico da rappresentare in due dimensioni, evitando di riconoscere nella grafica tre semplici quadrati rappresentati isometricamente. Bisognava invece riuscire a rappresentare su carta un insieme di piccoli cubi di ordine 2, ciascuno dei quali, rappresentato isometricamente, doveva contenere 12 numeri diversi essendo visibili tre sole facce con 4 caselle ciascuna (2×2).

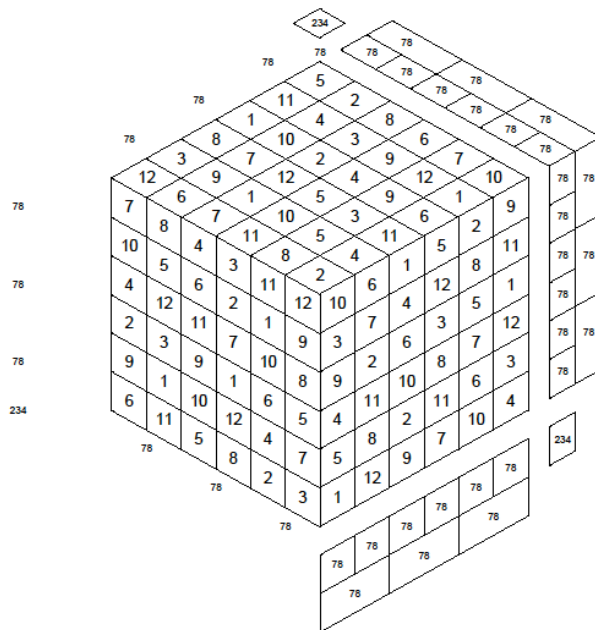


L'accostamento tra loro di più cubi 2×2 forma un cubo più grande (di ordine 4, 6, 8, ecc.). Viene da sé che i numeri diversi tra loro presenti nello schema devono essere 12: infatti, essendo la rappresentazione grafica tridimensionale di ciascun cubo di ordine 2 composta da 3 facce di 4 caselle ciascuna, si ha che in ciascun cubo di ordine 2 vi saranno 12 numeri ripetuti una sola volta. A questo punto ciascuna fila di caselle presente in due facce del cubo maggiore deve essere pari a 12 e pertanto si ha che il lato del cubo grande deve misurare 6 unità, e così le facce del cubo più grande conterranno 36 caselle. Essendo invece solo 12 i numeri da utilizzare ne viene che ciascun numero sarà presente 3 volte; perché ciò sia possibile è stato necessario individuare su ciascuna faccia del cubo alcuni sottoinsiemi composti da 12 caselle di dimensioni 6×2 . Ed ecco che finalmente lo schema ha trovato la sua conformazione definitiva.

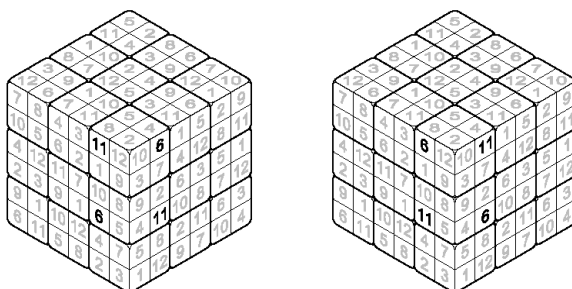


Fino a questo momento la matematica non ha avuto alcun ruolo per la creazione del rompicapo. Infatti, come già detto, ciascuno dei 12 numeri può benissimo essere sostituito da lettere dell'alfabeto o da simboli. La matematica (o meglio l'aritmetica) fa però il suo ingresso nella fase di composizione di ciascuno schema del gioco. Leggendo le istruzioni

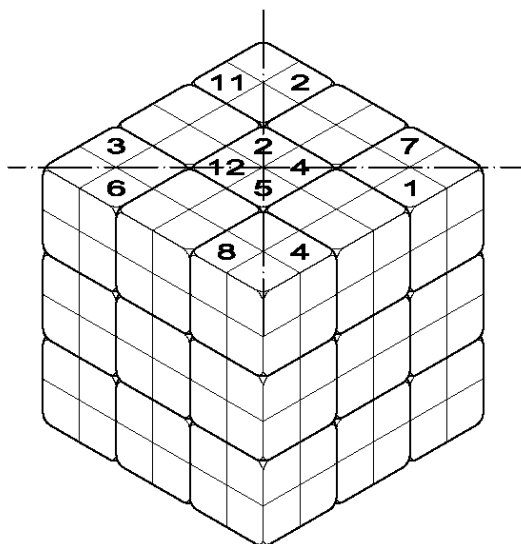
si nota che devono essere rispettate alcune condizioni quali: su ogni faccia del cubo grande devono trovarsi i 12 numeri ripetuti ciascuno 3 volte, pertanto per creare uno schema ed essere certi che sia corretto si deve verificare aritmeticamente che la somma di tutti i numeri di ciascuna faccia deve essere uguale a 234; in ciascuna fila di caselle 12x1 (sono in tutto 18) vi devono essere i singoli numeri da 1 a 12 ripetuti una sola volta, pertanto per essere certi della corretta compilazione dello schema si deve verificare che la somma aritmetica di tutti i numeri contenuti in ciascuna delle 18 righe e colonne sia pari a 78; ed ancora: il cubo centrale 2x2 deve contenere tutti i numeri da 1 a 12, pertanto la somma di essi deve dare 78; e così per le 18 aree da 6x2 nelle quali, per essere certi della correttezza dello schema compilato, la somma di tutti i numeri deve dare 78.



La creazione di un singolo schema richiede ancora alcuni passaggi. Bisogna infatti individuare tutti quei casi in cui le caselle occupate da due elementi (numeri o simboli) appartenenti ad una coppia qualsiasi si trovano contemporaneamente in due sole righe ed in due sole colonne della griglia. La mancata esposizione di almeno uno dei due elementi non consentirebbe il raggiungimento della soluzione univoca e quindi, una volta individuata la coppia di elementi con questa caratteristica, sarà necessario “scoprire”, rendendolo noto, almeno uno dei due elementi trovati al fine di permettere una ed una sola soluzione del gioco.

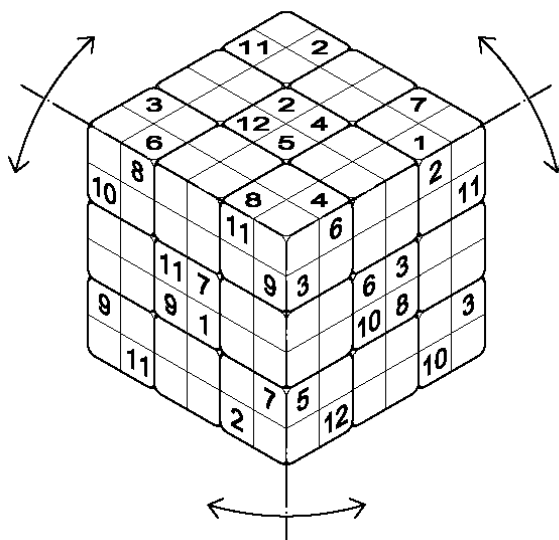


Ogni schema, inoltre, presenta delle caratteristiche di tipo “estetico” basate sull’uso dei diversi tipi di simmetria come quella speculare e quella rotazionale. Se prendiamo in esame la singola faccia del quadrato superiore 6x6, pur essendo rappresentata isometricamente, presenta comunque due assi di simmetria disposti lungo le due diagonali. Una volta individuati quei pochi numeri disposti in ordine sparso e necessari ad assicurare una sola soluzione, sarà necessario sceglierne degli altri che rispondano alla legge della simmetria.



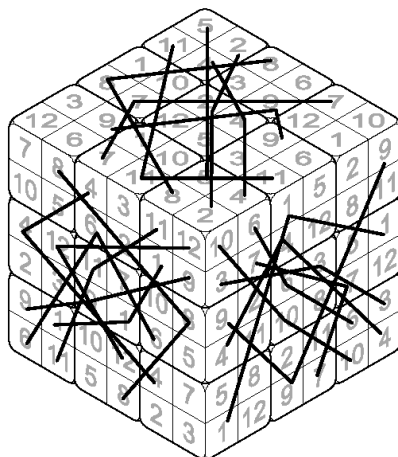
Lo schema però, oltre ai due assi di simmetria di ciascuna singola faccia, ne presenta anche degli altri quali quello centrale verticale: quelli posti sui bordi contigui di due diverse facce ma anche quello rotazionale posto al centro della figura.

La scelta dei numeri da rendere noti nello schema iniziale deve, quindi, essere condotta tenendo sotto controllo contemporaneamente le tre facce del cubo sapendo che per ogni elemento esposto su una singola faccia si dovrà esporre anche il corrispondente simmetrico nella stessa faccia e quelli delle altre due facce.



È evidente che nel comporre la grafica di un singolo schema, esponendo cioè quei numeri indispensabili all’ottenimento di una sola soluzione e quelli che ne equilibrino graficamente l’aspetto estetico, bisogna tener conto anche del livello di difficoltà che si vorrà ottenere nel corso della risoluzione. Infatti quanto più alto è il numero degli elementi noti quanto più semplice sarà trovare quelli “nascosti”.

Vi sono inoltre altri due aspetti che legano il Cubo di Coppo alla matematica. Il primo è legato alla teoria dei gruppi, ed è relativo al criterio di distribuzione degli elementi (siano essi numeri o simboli) all'interno delle corrispondenti caselle, nel rispetto delle condizioni imposte dalle regole.



Il secondo riguarda invece la ricerca di tutte le possibili combinazioni risolutive di un singolo schema, ovvero il calcolo combinatorio di tutti gli schemi possibili. Ma entrambe le questioni sono di una complessità tale che meriterebbero essere oggetto di un articolo a loro interamente dedicato.